Algèbres de Lie, anneaux de Lie, et théorie des modèles

Adrien Deloro

Sorbonne Université

13 juillet 2023, USTM

Merci au CIRM !

Mention spéciale à Olivia et Carolin !

Dans cette partie

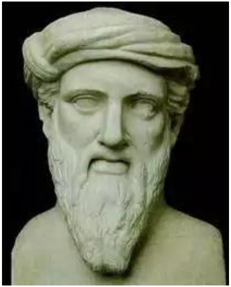
Pythagore

PYTHAGORE (v. -590 – v. -495) a laissé son nom au *pythagorisme*, dont une interprétation est que les nombres contrôlent la réalité :

- astronomique,
- géométrique,
- musicale, ...

C'est l'ancêtre du structuralisme !

...καὶ τὰ ὄντα πάντα ἀριθμοὺς προσηγόρευον...
Bibliothèque de Photius, 249

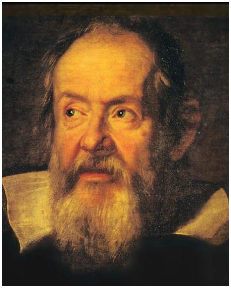


Galilée

Galileo GALILEI (1564–1642) a mathématisé la physique. Les propriétés physiques deviennent des grandeurs.

C'est ramener le monde aux nombres, comme l'avait rêvé Pythagore.

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro...
Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche...
Il Saggiatore, Capitolo 6



Klein

Felix Klein (1849–1925) a remplacé l'étude des *formes* géométriques par celle des *structures* algébriques.

À toute géométrie linéaire correspond un groupe de transformations qui la contrôle.

C'est Pythagore, et c'est déjà Bourbaki.

Der wesentlichste Begriff, der bei den folgenden Auseinandersetzungen nothwendig ist, ist der einer Gruppe von räumlichen Aenderungen.

Erlanger Programm, § 1

[*Gruppe von räumlichen Änderungen* = groupe de transformations spatiales.]

Groupes de Lie

Gruppe von räumlichen Änderungen = groupe de transformations spatiales.

En termes modernes :

Définition

Un *groupe de Lie réel/complexe* est un groupe $(G; \cdot)$ qui possède une structure de variété réelle/complexe compatible.

- *Compatible* signifie que la multiplication et l'inversion sont continues, que la topologie est séparée, etc.
- Ça formalise les groupes de matrices usuels.

Exemple

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C})$. $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{C})$, $E_8(\mathbb{R})$, ...

Pourquoi étudier les groupes de Lie ?

- Mathématiques : leur beauté, leur omniprésence.
- Physique mathématique : la relativité restreinte est juste l'étude du groupe $\mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Analyse numérique : les décompositions matricielles sont des décompositions obtenues dans les groupes de Lie.
- Probabilités : un thème à la mode est celui des marches aléatoires sur les groupes de Lie.

Mais *comment* étudier les groupes de Lie ? Là, ça se complique.

L'idée de Lie

Sophus LIE (1842–1899) [contemporain et ami de Klein] eut cette idée géniale :

- soit G un groupe de Lie réel/complexe.
- Comme les fonctions $x \mapsto gx$ sont des homéomorphismes, il suffit d'étudier G au voisinage de 1.
- On zoome fortement au voisinage de 1 : le groupe ressemble à son espace tangent $\mathfrak{g} = T_1 G$.
- $\mathfrak{g}$ est bien sûr un espace vectoriel réel/complexe (selon).
- Lie découvre une loi de composition interne binaire $[\cdot,\cdot] \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$...
- ... que l'on appelle depuis *crochet de Lie*.

Dans cette partie

La définition

Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}$-*algèbre de Lie* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une loi de composition interne binaire $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ vérifiant :

- bilinéarité ($=$ linéarité de chaque côté) ;
- antisymétrie, i.e. $[x,x]=0$;
- identité de Jacobi, i.e. :

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]].$$

Attention ! La loi $[\cdot,\cdot]$ n'est *pas* associative.

(D'où un préjugé tenace à l'encontre des algèbres de Lie, pourtant fon-da-men-tales.)

Exemples d'algèbres de Lie

$\mathfrak{g}$ un $\mathbb{K}$-e.v. avec $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ bilinéaire, antisymétrique, et de Jacobi :

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]].$$

Exemple (à avoir vérifié une fois dans sa vie !)

Soit $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = \{\text{matrices } n\times n\}$, muni de $[A,B] = AB - BA$. C'est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie... et même l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) : \operatorname{tr} M = 0\}$ est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de Lie, et même celle du groupe de Lie $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) : \det M = 1\}$...

de même que tr *est la différentielle en* I_n *de* det.

Correspondance de Lie

- Pour passer de G à $\mathfrak{g}$, on a pris l'espace tangent (techniquement, l'espace des vecteurs-vitesse de courbes passant par 1).
- Pour passer de $\mathfrak{g}$ à G, on prend l'*exponentielle*.
- Si G est un groupe de matrices réel/complexe, alors $\mathfrak{g}$ est une $\mathbb{R}/\mathbb{C}$-algèbre de matrices. . .
- . . . et cette exponentielle est alors l'exponentielle matricielle $\exp M = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} M^k$, celle qui sert en systèmes dynamiques.

Sous quelques hypothèses techniques, on a donc une correspondance :

$$\{\text{groupes de Lie}\} \leftrightarrow \{\text{algèbres de Lie}\}.$$

Mais c'est restreint à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$! ($\longleftarrow$ L'algébriste est malheureux.)

Classification des algèbres de Lie simples de dimension finie

(Ici, « simple » = pas d'idéaux de Lie.)

Théorème (Killing-Cartan-Dynkin, début XX^e)

On a la liste de toutes les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie simples de dimension finie.

- Les algèbres de Kac-Moody étudient certains cas de dimension infinie.
- Pour l'algébriste, il est *très* naturel de passer... en caractéristique p.

Théorème (Block-Premet-Strade-Wilson, *fin* XX^e)

Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2, 3$, alors on a la liste de toutes les $\mathbb{K}$-algèbres de Lie simples de dimension finie.

Pour le logicien, il est encore naturel de passer aux anneaux de Lie.

Définition

Un *anneau de Lie/$\mathbb{Z}$-algèbre de Lie* est un groupe additif avec crochet biadditif, antisymétrique, de Jacobi... mais sans supposer de corps.

Dans cette partie

Parties définissables

La *théorie des modèles*, c'est la géométrie des parties définissables.
Soit $(\mathfrak{g}; +, [\cdot,\cdot])$ un anneau de Lie.

Définition

Un sous-ensemble $X \subseteq \mathfrak{g}$ est *définissable* s'il existe une formule logique (= équations, et, ou, non, pour tout, il existe) $P(x)$ dont c'est l'ensemble de solutions, i.e. $X = \{x \in \mathfrak{g} : P(x)\}$.

Exemple

- Si $x \in \mathfrak{g}$, alors $C_{\mathfrak{g}}(x) = \{y \in \mathfrak{g} : [x,y] = 0\}$ est définissable.
- Si $X \subseteq \mathfrak{g}$ est définissable, alors $C_G(X) = \bigcap_{x \in X} C_{\mathfrak{g}}(x)$ est définissable... mais a priori pas en général. Si $x \in \mathfrak{g}$, alors $\{[x,y] : y \in \mathfrak{g}\}$ est définissable, ainsi que $\{[y,z] : (y,z) \in \mathfrak{g}^2\}$.
- A priori, $\mathfrak{g}' = \langle [x,y] : (x,y) \in \mathfrak{g}^2 \rangle$ n'est pas en général définissable.

Une dimension abstraite

Définition

Un anneau de Lie $(\mathfrak{g}; +, [\cdot, \cdot])$ est *de rang de Morley fini* si toute partie définissable X porte un entier $\dim X$, vérifiant des propriétés naturelles.

Exemple

- $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ est de rang de Morley 4.
- $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est de rang de Morley 3.
- En revanche $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$ n'est *pas* de rang de Morley fini (technique).
- Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute $\mathbb{K}$-algèbre de Lie *de dimension finie* est de rang de Morley fini.

Conclusion : ça modélise plutôt « la géométrie algébrique » que la géométrie de Lie.

La conjecture

Un thème central en théorie des modèles est la reconstruction de corps dans les structures algébriques simples.
On conjecture donc :

Conjecture

Un anneau de Lie simple de rang de Morley fini est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie sur un corps algébriquement clos.

- Connu en rang de Morley 3 (fin années 1980) : alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.
- Analogue d'une conjecture ÉNORME sur les *groupes* de rang de Morley fini, la *conjecture de Cherlin-Zilber*.

Démontré à l'USTM !

Conjecture

Un anneau de Lie simple de rang de Morley fini est une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie sur un corps algébriquement clos.

Grâce à CIRM-AIMS, nous avons pu finir le problème en dimension 4. . .
mais il n'y a pas de $\mathbb{K}$-algèbre de Lie simple de dimension 4.

Théorème (D.-Tindzogho Ntsiri, fini cette semaine !)

Il n'existe pas d'anneau de Lie simple de rang de Morley 4.

Naturellement cela pose de *nombreuses* questions pour l'avenir, mais c'est une autre histoire.

Merci pour votre attention !